Частное учреждение образования
«Институт современных знаний имени А. М. Широкова»

Кафедра высшей математики и информатики

СОГЛАСОВАНО
Проректор по учебной и научной работе
Козлович М. И.

____
14.10.2019 г.

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности 1-19 01 01 Дизайн (по направлениям),
направления специальности
1-19 01 01-06 Дизайн (виртуальной среды);
1-19 01 01-02 Дизайн (предметно-пространственной среды);
1-19 01 01-05 Дизайн (костюма и тканей)

Составитель
Жук С. Н., старший преподаватель кафедры высшей математики и информатики частного учреждения образования Института современных знаний имени А. М. Широкова

Рассмотрено и утверждено
на заседании Совета Института
протокол № 3 от 29.10.2019 г.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра естественнонаучных дисциплин Учреждения образования «Белорусская государственная академия авиации» (протокол № 2 от 26.09.2019 г.).

Шаталова В. В., заместитель декана факультета компьютерного проектирования Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат технических наук, доцент.

Рассмотрено и рекомендовано к утверждению
кафедрой высшей математики и информатики
(протокол № 3 от 01.10.2019 г.)

О75 **Жук, С. Н.** Основы высшей математики : учеб.-метод. комплекс для студентов специальности 1-19 01 01 Дизайн (по направлениям), направления специальности 1-19 01 01-06 Дизайн (виртуальной среды); 1-19 01 01-02 Дизайн (предметно-пространственной среды); 1-19 01 01-05 Дизайн (костюма и тканей) [Электронный ресурс] / Сост. С. Н. Жук. – Электрон. дан. (0,9 Мб). – Минск : Институт современных знаний имени А. М. Широкова, 2019. – 74 с. – 1 электрон. опт. диск (CD).

Систем. требования (миним.) : Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 500 Мб свободного дискового пространства ; привод DVD ; операционная система Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista (32 бит) или более поздние версии ; Adobe Reader 7.0 (или аналогичный продукт для чтения файлов формата pdf).

Номер гос. регистрации в НИРУП «Институт прикладных программных систем» 1271920356 от 25.11.2019 г.

Учебно-методический комплекс представляет собой совокупность учебно-методических материалов, способствующих эффективному формированию компетенций в рамках изучения дисциплины «Основы высшей математики».

Для студентов вузов.

ISBN 978-985-547-336-8

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс (УМК) по дисциплине «Основы высшей математики» предназначен для студентов специальности 1-19 01 01 Дизайн (по направлениям) Частного учреждения образования «Институт современных знаний имени А. М. Широкова» для эффективного освоения данной дисциплины.

УМК представляет собой совокупность учебно-методических материалов, способствующих эффективному формированию компетенций в рамках дисциплины «Основы высшей математики», которая изучается на первом курсе. УМК включает в себя краткий курс лекций, планы практических занятий, вопросы для самоподготовки к зачету, проверочные работы по темам курса, учебную программу дисциплины, список литературы для освоения полного объема знаний, соответствующего стандартам высшей школы.

Стремительная математизация и компьютеризация практически всех областей знания требует перестройки системы математического образования в высшей школе. Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки любого специалиста, который будет логически мыслить, оперировать математическими понятиями, использовать методы математического моделирования при решении разных прикладных задач.

Студент должен иметь представление о значительном числе математических понятий, что даст ему возможность корректного применения математики в практической деятельности и позволит безболезненно повышать свою квалификацию. УМК поможет студентам научиться использовать математику как метод мышления, как язык, который используя конкретные математические понятия и формулировки, помогает решать основные математические задачи, а также строить простейшие математические модели и ориентироваться в возможностях их реализации на практике. Студенты освоят логические действия для того, чтобы мыслить рационально, оперируя абстрактными понятиями, понимая место точных формулировок.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Краткий курс лекций

Введение в курс основ высшей математики

При изучении дисциплины «Основы высшей математики» студенты должны выработать навыки в математическом исследовании различных проблем, развить логическое мышление, пространственное воображение. При обучении основных методов высшей математики и реализации на практике студенты должны уметь самостоятельно расширять математические знания и производить математический анализ прикладных задач.

В современном мире, который использует информационные и компьютерных технологии, необходимо повышать уровень фундаментальной подготовки специалистов в области дизайна, поэтому наша задача – усилить прикладное направление курса высшей математики с требованиями специальности. Курс основ высшей математики является базой для изучения таких общеобразовательных и специальных курсов как: перспектива, начертательная геометрия и черчение, информационные технологии в дизайне, проектная и компьютерная графика. Успешному изучению данной дисциплины предшествует изучение курса математики общеобразовательного уровня.

1.1. Введение в теорию множеств

Основоположником теории множеств является Г. Кантор (1845-1918), он же и определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью. ***Множество*** – первичное неопределяемое понятие. Под множеством понимают совокупность (группу, набор и т. д.) элементов, которые характеризуются одинаковыми свойствами.

Множество – это любое собрание определенных и различимых между собой объектов. Так, можно определить примеры множеств, а именно:

– Множество целых чисел.

– Буквы русского алфавита.

– Множество людей, проживающих в Республике Беларусь.

– Собрание книг домашней библиотеки.

– Множество студентов 1 курса специальности «Культурология».

Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т. д. Элементы любого множества обладают свойствами:

– ***Определенные.*** Это означает, что для каждого объекта можно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет.

– ***Различимы между собой.*** Во множестве не может быть объектов одинаковых.

– ***Мыслятся как единое целое.*** То есть все объекты рассматриваются в совокупности.

– ***Объекты, входящие в данное множество, называются элементами множества.***

Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее применение к очень многим областям знания.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), называются ***конечными***.

Множества, состоящие из бесконечного числа элементов, – ***бесконечными***.

Множества обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита $\boldsymbol{A, B, X}$, а их элементы – малыми, $\boldsymbol{a, b, x}$.

Запись $\boldsymbol{x \in X}$ означает, что объект x есть элемент множества X. Если же x не принадлежит множеству X, то пишут $\boldsymbol{x \notin X}$.

Запись $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (множество А содержится в В) означает, что каждый элемент множества А принадлежит В. В этом случае множество А называют подмножеством множества В.

Множества А и В называют равными ($\mathbf{A = B}$), если $B \subset A$ и $A \subset B$.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют пустым и обозначают символом $\varnothing$.

Существуют следующие способы описания множеств:

– Конечное множество может быть задано перечислением входящих в него объектов, например,

A= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} – множество цифр,

B= {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье} – множество дней недели.

– Любое множество может быть задано при помощи правила, которое определяет, является ли данный объект элементом множества или нет, например,

C= {x|x+3=10} – множество решений линейного уравнения, очевидно, что элементом множества С является число 7, то есть **C={7}.**

Так, множество может содержать только один элемент.

Запись **A $\subset$ B** (множество А содержится в В) означает, что каждый элемент множества А принадлежит В. В этом случае множество А называют ***подмножеством множества В***.

Так, множество **B= {1,3,5,7,9}** есть подмножество множества цифр **A= {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}**.

– Бесконечное множество точек на плоскости может быть задано как множество пар действительных чисел (x; y), например,

D= {(x; y)},

G= {(x; y)|x^2+y^2=1} – бесконечное множество точек, равноудаленных от начала координат (окружность радиуса 1)**.**

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$; если элемент a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$.

Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то множество A называется ***подмножеством*** множества B (или говорят, что A ***включено в*** B), пишут $A \subset B$ (или $B \supset A$) (рис. 1.3). Два множества A, B называются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов: $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$. Множество, которое не имеет элементов, называется ***пустым*** и обозначается символом $\varnothing$.

К основным операциям над множествами относят пересечение, объединение, разность, дополнение.

Пересечением множеств *A, B* называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству *A*, и множеству *B*.

Объединением множеств *A, B* называется множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству *A*, или множеству *B* (хотя бы одному из множеств *A, B*).

Разностью множеств $A \backslash B$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству *A* и не принадлежат множеству *B*.

Дополнением множества *A* до конкретного (универсального) множества *U* называется множество $\overline{A}$, которое определяется равенством $\overline{A} = U \setminus A$.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются, обычно, с применением ***кругов Эйлера*** или ***диаграмм Венна***. Графически это представлено на рисунке 1.

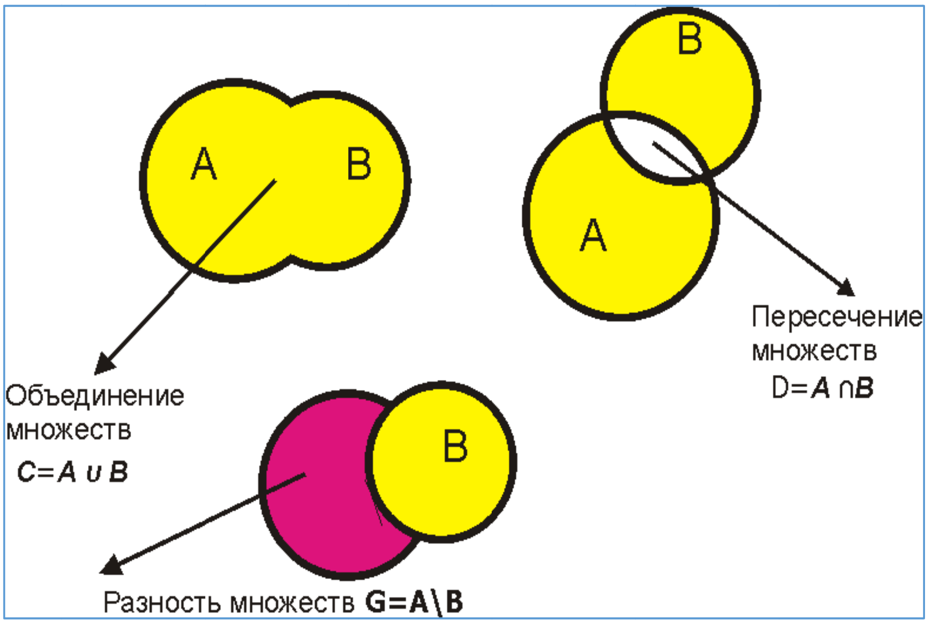


Рис. 1

Основы логики

Основу математической логики составляют исчисление высказываний и исчисление предикатов. Исчисление предикатов оперируют утверждениями, выступающими как единое целое, не рассматривая их субъективную структуру. Логика высказываний лежит в основе всех других разделов логики. Схема построения этих исчислений не отличается от схемы построения любой другой математической теории, а именно: берут некоторый класс объектов, которые составляют первичные понятия, не оперируемые в данной теории, для них полагаются истинными некоторые свойства, вводятся отношения и операции над этими объектами.

Основным понятием математической логики является высказывание.

Высказывание – это любое утверждение, которое несет некоторое повествование, и про которое всегда определенно и объективно можно сказать является оно истинным или ложным.

Например, «5+3=8» и «В январе 31 день» являются истинным и высказываниями. «Киев – столица Беларуси» и «Год состоит из 5 кварталов» являются ложными высказываниями. Высказывания «Ура!», «Который час?» не являются высказываниями.

Для «Истины» используются следующие обозначения: 1, да, и, +, true.

Для «Лжи» - 0, нет, л, – , false.

Существуют 2 вида высказываний: простые и сложные.

Простое (элементарное) высказывание – это такое высказывание, которое не может быть разбито на более простые высказывания.

Про такое высказывание всегда однозначно можно, сказать, что оно истинно или ложно, не интересуясь его структурой. Обычно на практике высказывания обозначаются заглавными буквами латинскими буквами *A, B, C*, …, их значения ***истина*** и ***ложь*** соответственно, через «И» и «Л». Так, можно использовать обозначение A= «5+7=12», B= «Сегодня пятница» и другие.

Сложное (или составное) высказывание – это высказывание, которое образовано из простых путем логических операций, к которым относятся логическое отрицание (инверсия), логическое умножение (конъюнкция), логическое сложение (дизъюнкция), логическое следование (импликация), логическое равенство (эквивалентность).

Если A – высказывание, то ***отрицание высказывания A*** определяется как такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно. Отрицание высказывания A обозначается $\overline{A}$ (или $\neg A$) и читается «*не*

A». Истинность-ложность операции ***отрицания*** выражает истинностная таблица 1.

A	$\overline{A}$
И	Л
Л	И

Таблица 1

Например, высказывание А= «В аудитории холодно», отрицание высказывания ¬А=«В аудитории не холодно».

Конъюнкцией двух высказываний называется такое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба ее высказывания истинны.

Если A, B – высказывания, то их конъюнкция обозначается $A \wedge B$ и читается «A и B». Например, если А=«12 делится без остатка на 3», В=«12 делится без остатка на 4», то $A \wedge B$ =«12 делится без остатка на 3 и на 4».

Конъюнкции соответствует истинностная таблица 2.

A	B	$A \wedge B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Таблица 2

Дизъюнкцией двух высказываний называется такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба составляющие ее высказывания ложны.

Например, если А=«Сегодня облачно», В=«идет дождь», то $A \vee B$ =«Сегодня облачно или идет дождь».

Если A, B – два высказывания, то их дизъюнкция обозначается $A \vee B$ и читается «A или B».

Операции дизъюнкции соответствует истинностная таблица 3.

A	B	$A \vee B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

Таблица 3

Импликация высказываний А, В определяется как такое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Импликация двух высказываний A, B обозначается $A \Rightarrow B$ и читается «если A, то B». Высказывание A называется ***посылкой импликации***, а B – ***заключением***.

Например, если А=«Целое число делится на 4», В=«Целое число делится на 2», то $A \Rightarrow B$=«Если целое число делится на 4, то оно делится на 2»

Импликации соответствует истинностная таблица 4.

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Таблица 4

Эквивалентность двух высказываний A, B определяется как высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывания A, B оба истинны или оба ложны. Обозначается $A \Leftrightarrow B$ и читается «A тогда и только тогда, когда B» («если A, то B, и, если B, то A», «A есть необходимое и достаточное условие для B»). Значения эквивалентности определены в истинностной таблице 5.

Пусть А= «3n – четное число», В= «n – четное число». Тогда G= $A \Leftrightarrow B$ = «3n – четное число тогда и только тогда, когда n – четное число».

A	B	$A \Leftrightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Таблица 5

Введенные операции над высказываниями выполняются слева направо в следующем порядке:

отрицание ¬,

конъюнкция Λ,

дизъюнкция V,

импликация →,

эквивалентность ↔. Для нарушения такого порядка служат скобки.

Матрицы и определители

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – матричная алгебра имеют чрезвычайно большое значение. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей различных объектов и процессов, которые возникают в различных областях жизнедеятельности, записываются в достаточно простой, а главное компактной форме. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих смысловое содержание матрицы в некоторых прикладных задачах. С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица 6 распределения ресурсов по отдельным отраслям народного хозяйства может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения, в которой 3 строки и 2 столбца.

Ресурсы	Отрасли народного хозяйства	
	Образование	Сфера услуг
Электроэнергия	5.3	4.1
Трудовые ресурсы	2.8	2
Водные ресурсы	4	5.1

Таблица 6

Так таблице ставим в соответствие матрицу $A=\begin{pmatrix} 5.3 & 4.1 \\ 2.8 & 2 \\ 4 & 5.1 \end{pmatrix}$. В этой записи элемент $a_{21}=2.8$ показывает, сколько трудовых ресурсов потребляет образование.

В различных областях жизнедеятельности применяются процедуры экспертного оценивания. В простейшем случае эксперты независимо и в тайне друг от друга выставляют сравниваемым объектам оценки в соответствии с заранее установленной шкалой ценностей. Из оценок экспертов составляется таблица, например, таблица 7.

Модельеры	X	Y	Z	W
Судья Иванов	78	80	66	82
Судья Петрова	77	77	69	81
Судья Белов	82	76	78	66
Судья Сидорова	89	79	77	72
Судья Краснов	79	67	65	67

Таблица 7

Совокупность всех экспертных оценок является матрицей из 5 строк и 4 столбцов.

Оценки, выставленные разными экспертами одному и тому же объекту (числа в строках) вообще говоря, различны. Это связано с неодинаковой компетентностью экспертов, с возможным наличием в составе экспертов людей с предвзятым отношением к участникам соревнований и прочими причинами.

Поэтому для получения обобщенной оценки каждого объекта, учитывающей «коллективное мнение» экспертов, необходима соответствующая обработка (преобразование) матрицы экспертных оценок, выполняемая с использованием соответствующих правил матричного исчисления.

После этой обработки и выставляется рейтинг участников конкурса.

Прямоугольная таблица следующего вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов, на пересечении которых находятся вещественные числа a_{ij} – элементы, называется числовой матрицей (или матрицей) порядка «m на n». Обозначается $A_{m\times n}$.

Перечислим некоторые виды матриц, которые встречаются при решении определенных задач.

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой, и является аналогом нуля на множестве действительных чисел.

Если число строк равно числу столбцов, то матрицу называют ***квадратной***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В квадратной матрице выделяют главную диагональ и вторую (побочную диагональ).

Квадратная матрица порядка n называется ***диагональной***, если все ее элементы, кроме, быть может, элементов главной диагонали, равны нулю. Приведем пример матрицы такого вида $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица называется ***единичной***, когда все ее диагональные элементы равны единице, приведем приме единичной матрицы третьего порядка $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Единичная матрица является матричным налогом единицы во множестве вещественных чисел.

Треугольной называется матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают верхнюю и нижнюю треугольную матрицы, например,

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

К основным действиям над матрицами отнесем следующее: умножение матрицы на число, сложение (вычитание) матриц, умножение матриц, обращение матрицы, транспонирование матрицы. Определим каждую из перечисленных операций с демонстрацией примеров.

Любую матрицу можно умножить на число, для этого каждый элемент данной матрицы нужно умножить на это число.   Отметим тот факт, что, если мы умножаем матрицу на нуль, в результате получается нулевая матрица соответствующего порядка.

Чтобы сложить матрицы, необходимо, чтобы они были одинакового порядка, и по правилу сложения матриц, мы должны сложить их соответствующие элементы. Вычитание матриц является операцией, противоположной сложению: $D_{m\times n} = A_{m\times n} + (-1)\cdot B_{m\times n} = A_{m\times n} - B_{m\times n}$

Приведем пример, который показывает, как от матрицы, умноженной на число, вычитают матрицу:

$$5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 8\\ 7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 8\\ 7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-9 & 10-8\\ 15-7 & 20-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 8 & 14\end{pmatrix}.$$

Чтобы умножить две матрицы, они должны быть согласованные. Матрицы называются ***согласованными*** из двух строго записанных, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй (заметим, что если переставить местами матрицы, то согласованность может быть нарушена).

Чтобы умножить матрицу А на матрицу В, следует элементы i-строки матрицы А умножить на соответствующие элементы j-столбца матрицы В и соответствующие произведения сложить. Таким образом, перемножать можно только согласованные матрицы, а правило умножения матриц можно определить, как «умножение строки на столбец».

На примере продемонстрируем, как умножить матрицу, у которой 1 строка и 3 столбца, на матрицу, имеющую 3 строки и 2 столбца. Данные матрицы являются согласованными, поэтому результат умножения будет матрицей, имеющей 1 строку и 2 столбца, а именно:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}1+6+15 & 2+8+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 28\end{pmatrix}$$

Отметим, что две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.

В исследованиях и при решении задач алгебры и геометрии часто используют так называемые «элементарные преобразования» над строками (столбцами) матрицы. Назовем ***элементарными преобразованиями*** следующее:

1. отбрасывание нулевой строки (столбца);
2. умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю;
3. изменение порядка строк (столбцов);
4. прибавление к элементам какой-нибудь строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца) матрицы, предварительно умноженные на одно и то же число, отличное от нуля;
5. транспонирование матрицы.

Заметим, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к треугольной (ступенчатого вида) матрице.

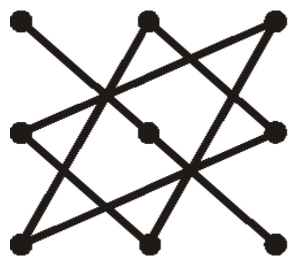
Любая матрица может быть охарактеризована несколькими числовыми показателями, играющими важную роль при решении прикладных и исследовательских задач, где используются матрицы. Одной из таких числовых характеристик является определитель матрицы. Любой квадратной матрице по определенному закону ставится в соответствие некоторое число, которое обозначается $\det(A)$, и называется определителем матрицы A.

Определитель первого порядка есть сам элемент.

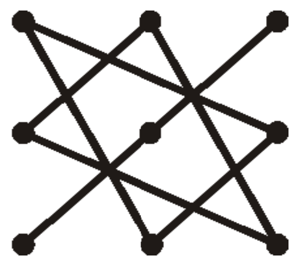
Определитель второго порядка (квадратной матрицы второго порядка) равен разности произведений элементов главной и второй диагоналей матрицы.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Вычисляется определитель третьего порядка, с помощью так называемого «правила треугольников», которое можно запомнить с помощью двух схем:



$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$



Используя данную схему, вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot(-2) + 0\cdot 0\cdot 1 + (-2)\cdot 4\cdot 3 -$$

$$-0\cdot 3\cdot 5 - 0\cdot(-2)\cdot(-2) - 1\cdot 1\cdot 4 =$$

$$= -10 + 0 - 24 - 0 - 0 - 4 = -38.$$

Определитель обладает свойствами, перечислим их:

1. При перестановке двух строк местами определитель матрицы меняет знак на противоположный знак.

2. Если какая-нибудь строка матрицы состоит из нулей, то определитель такой матрицы равен нулю.

3. Если все элементы какой-нибудь строки матрицы умножить на число, то определитель такой матрицы увеличится (уменьшится) в это число раз.

4. Если у матрицы все элементы двух или более строк соответственно пропорциональны (равны), то определитель такой матрицы равен нулю.

5. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-нибудь строки матрицы прибавить соответствующие элементы другой строки матрицы, предварительно умноженные на одно и то же число.

6. Определитель матрицы не меняется при транспонировании. Из этого свойства следует, что любое из свойств останется справедливым, если в его формулировке везде слова «строка» заменить словом «столбец».

Используя свойства определителей, можно увидеть, что определитель данной матрицы равен нулю, а именно: у него соответствующие элементы первой и четвертой строк пропорциональны, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 & -14 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

Рассмотрим алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка. Рассмотрим систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными, а именно систему следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Решением данной системы является любой набор значений неизвестных, удовлетворяющий всем трем уравнениям системы. Приведенную выше систему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричной форме, если ввести следующие обозначения. Пусть коэффициенты при неизвестных мы запишем в виде квадратной матрицы третьего порядка, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Неизвестные величины и так называемые свободные коэффициенты системы запишем в виде матриц-столбцов соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно представить в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$. Под решением матричного уравнения понимают такую матрицу X, которая обращает данное уравнение в верное равенство. Это возможно не для любой матрицы.

Если определитель матрицы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Эти формулы называются формулами Крамера, а метод решения системы линейных алгебраических уравнений – правилом Крамера. Матрицы A_1, A_2, A_3 получаются из матрицы A заменой первого, второго, третьего столбцов свободных коэффициентов.

Общие понятия аналитической геометрии

Под ***вектором*** на плоскости понимают направленный отрезок с началом в точке *A* и концом в точке *B*, который обозначается $\overrightarrow{AB}$. ***Модулем***, или ***длиной,*** $|\overline{AB}|$ такого вектора называется длина отрезка $AB.$ Можно обозначать вектора, не указывая начало и конец вектора, в этом случае используется обозначение $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными*** (обозначение: $\bar{a} \parallel \bar{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Кроме того, если они имеют одинаковое направление, их называют ***сонаправленными*** (обозначение: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$), а если противоположное – ***противоположно направленными*** (обозначение: $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$).

Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются ***равными,*** если они имеют одинаковые длины и являются сонаправленными. Записывается это с помощью обычного знака равенства: $\overline{AB} = \overline{CD}.$ При этом запись $\bar{a} = \overline{AB}$ понимают также в смысле, что начало свободного вектора $\bar{a}$ приложено к точке *A*.

Вектор нулевой длины называется ***нулевым*** и обозначается $\bar{0}.$ Направление такого вектора считается неопределенным. У нулевого вектора начальная и конечная точки совпадают.

Пусть заданы два ненулевых вектора $\bar{a}, \bar{b}.$ Отложим их от некоторой точки *O* таким образом, чтобы $\overline{OA} = \bar{a},\ \overline{OB} = \bar{b}.$ Под углом $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимают наименьший положительный угол, на который надо повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора. Этот угол не зависит от выбора точки *O* и изменяется от 0 до π.

Для векторов определены следующие ***линейные операции***: умножение вектора на действительное число и сложение (вычитание) векторов $\bar{a}, \bar{b}.$

Произведением вектора $\bar{a}$ ***на действительное число*** λ называется вектор $\lambda \cdot \bar{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\left|\lambda \cdot \bar{a}\right| = |\lambda| \cdot \left|\bar{a}\right|$;

2) $\lambda \cdot \vec{a} \upuparrows \vec{a}$, если $\lambda > 0$; $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Для того чтобы сложить векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ геометрически, используют ***правило треугольника***: начало вектора $\bar{b}$ совмещается с концом вектора $\bar{a}$, их суммой является вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец – с концом вектора $\bar{b}$ (рис. 1). Для обозначения этого действия используется обычный знак суммы: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

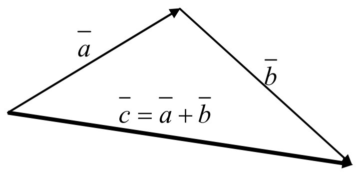


Рис. 1

Сложение двух векторов можно производить также по ***правилу параллелограмма***: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приводятся к общему началу, некоторой точке *O*, и на них строится параллелограмм. Тогда суммой этих векторов является вектор $\bar{c}$, который совпадает с диагональю построенного параллелограмма, исходящей из точки *O* (рис. 2).

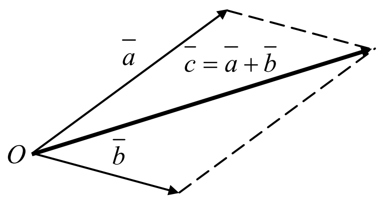


Рис. 2

Вектор $-\bar{a} = -1 \cdot \bar{a}$ называется ***противоположным*** вектору $\bar{a}$.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + \left(-\bar{b}\right)$.

Для того чтобы найти разность $\bar{a} - \bar{b}$, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приводятся к общему началу. Тогда разностью $\bar{a} - \bar{b}$ будет являться вектор $\bar{c}$, у которого начало совпадает с концом вектора $\bar{b}$, а конец – с концом вектора $\bar{a}$ (рис. 3).

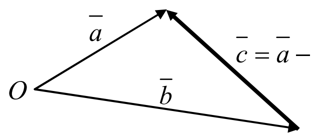


Рис. 3

Таким образом, геометрически векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$ изображаются диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, которые приведены к общему началу (рис. 4): $\overline{d_1}=\overline{a}+\overline{b},\ \overline{d_2}=\overline{a}-\overline{b}.$

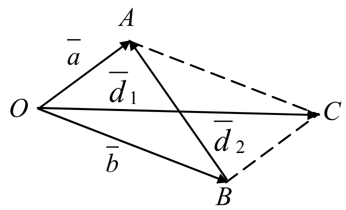


Рис. 4

Вектор $\overline{a_0}$ называется ***ортом*** (***единичным вектором***) вектора $\overline{a}$, если $\overline{a_0}\uparrow\uparrow\overline{a}$ и $\left|\overline{\grave{a}_0}\right|=1.$ Для его нахождения может быть использована формула $\overline{a_0}=\dfrac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}.$

Вектор $\overline{a}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ ...,\ \overline{a_n},$ если существуют числа $c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n,$ такие, что

$$\overline{a}=c_1\overline{a_1}+c_2\overline{a_2}+...+c_n\overline{a_n},\quad n\in\mathbf{N}.$$

Говорят, что точка С делит вектор $\overline{AB}$ в отношении λ $(\lambda>0)$, если $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}.$

Кроме линейных операций, для векторов определено также ***скалярное умножение, векторное и смешанное***.

Скалярным произведением $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$ двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a},\widehat{\ }\overline{b}\right).$ Скалярное произведение обозначается также $\overline{a}\cdot\overline{b}.$ Если хотя бы один из векторов $\overline{a}$ или $\overline{b}$ нулевой, то скалярное произведение равно нулю.

Скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ называется величина $\overline{a}^2=\left(\overline{a},\ \overline{a}\right).$

Для вычисления ***угла между векторами*** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно воспользоваться формулой

$\cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \dfrac{\left(\bar{a}, \bar{b}\right)}{\left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right|}.$ Геометрическим смыслом скалярного произведения является тот факт, что если скалярное произведение больше нуля, то угол между векторами острый, в противном случае тупой. И если скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Рассмотрим различные случаи задания прямой L на плоскости.

Если задан ненулевой ***направляющий вектор*** $\bar{a} = (l, m) \parallel L$ и радиус-вектор $\bar{r}_0 = (x_0, y_0)$ некоторой фиксированной точки, принадлежащей данной прямой $M_0(x_0, y_0) \in L,$ то в этом случае радиус-вектор $\bar{r} = (x, y)$ точки $M(x, y) \in L$ задается формулой $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a},$ где $t \in \mathbf{R}.$ Данное уравнение называется ***векторно-параметрическим уравнением прямой*** L.

Если (x_0, y_0) – координаты точки $M_0,$ которая лежит на прямой L, (l, m) – координаты направляющего вектора $\bar{a},$ любого вектора, параллельного данной прямой, то прямая задается ***параметрическими уравнениями:***
$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbf{R}, \quad l^2 + m^2 \neq 0. \end{cases}$

Если $\bar{a} = (l, m)$ – направляющий вектор, такой, что $l^2 + m^2 \neq 0,$ и $M_0(x_0, y_0)$ – точка, через которую проходит прямая, то имеем ***каноническое уравнение***:
$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \quad l^2 + m^2 \neq 0.$

Если прямая L не параллельна оси Ox, то для всех направляющих векторов отношение $\dfrac{m}{l} = k = \mathrm{tg}\alpha, \quad \alpha = (\widehat{L, Ox}).$ По заданному угловому коэффициенту k прямой L и точке $M_0(x_0, y_0) \in L$ уравнение прямой L может быть задано в следующем виде: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Это ***уравнение прямой с угловым коэффициентом*** k, ***проходящей через точку*** M_0. В случае, если $M_0(0, b)$ – точка пересечения прямой L с осью Oy, это уравнение может быть записано в следующем виде: $y = kx + b.$

Координаты направляющего вектора $\overline{a}$ прямой L могут быть найдены, если известны две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ этой прямой: $\overline{a} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. ***Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*** имеет вид ***:*** $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$.

Если известны точки пересечения прямой L с координатными осями, т. е. точки $M_0(a, 0)$ и $M_1(0, b)$, то справедливо ***уравнение «в отрезках»***: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Положение прямой на плоскости однозначно определено и в случае, когда задан ненулевой ***нормальный вектор*** $\overline{n} = (A, B) \perp L$ этой прямой и точка $M_0(x_0, y_0) \in L$. Нормальным вектором прямой называется любой вектор, перпендикулярный прямой. Условие перпендикулярности векторов $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$ позволяет перейти к векторному уравнению $((\overline{r} - \overline{r_0}), \overline{n}) = 0$ и затем к его координатной форме: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, которое после преобразований принимает вид $Ax + By + C = 0,$ где $C = -Ax_0 - By_0,\ A^2 + B^2 \neq 0.$ Уравнение называется ***общим уравнением*** прямой L.

Пусть P – плоскость, для которой требуется построить уравнение, $M(x, y, z)$ – произвольная точка этой плоскости. Если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости P и два неколлинеарных вектора $\overline{a_1} = (k_1, l_1, m_1)$ и $\overline{a_2} = (k_2, l_2, m_2)$, параллельных данной плоскости, то справедливо ***векторно-параметрическое*** уравнение плоскости P в виде*:* $\overline{r} = \overline{r_0} + s\overline{a_1} + t\overline{a_2}$, где $\overline{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ – радиус-вектор точки $M_0,\ \ s, t \in \mathbf{R}.$Запись данного уравнения в координатной форме можно зпредставить в виде системы следующего вида: $\begin{cases} x = x_0 + sk_1 + tk_2, \\ y = y_0 + sl_1 + tl_2, \\ z = z_0 + sm_1 + tm_2 \end{cases}$, которая называется ***параметрическими*** уравнениями плоскости.

Введенное понятие матрицы позволяют записать уравнение плоскости P с помощью определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0.$

Если известны три точки $M_0(x_0, y_0, z_0),\ M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2)$ плоскости P, не лежащие на одной прямой, то аналогично, используя запись определителя можно получить ***уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки***: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0.$

Если известны точки пересечения плоскости P с координатными осями, а именно: $M_0(a;0;0)$, $M_1(0;b;0)$, $M_2(0;0;c)$, то справедливо ***уравнение плоскости «в отрезках»*** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Если задан нормальный вектор $\overline{n}=(A,B,C)\perp P$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ плоскости P, то справедливо уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$ на основании которого выводится ***общее уравнение плоскости*** P $Ax+By+Cz+D=0,$ где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$

Пусть L – прямая, для которой необходимо составить уравнения, $M(x,\ y,\ z)$ – произвольная точка этой прямой. Если известны координаты направляющего вектора $\overline{a}=(k,l,m)\neq\overline{0}$ прямой L и некоторой фиксированной ее точки $M_0(x_0,y_0,z_0),$ то уравнение $\overline{r}=\overline{r_0}+t\overline{a},$ где $\overline{r_0}$ – радиус-вектор точки M_0; $\overline{r}$ – радиус-вектор произвольной точки, $t\in\mathbf{R},$ называется ***векторно-параметрическим*** уравнением прямой L. В координатной форме уравнение равносильно трем параметрическим уравнениям, представленным в виде: $\begin{cases} x=x_0+kt, \\ y=y_0+lt, \\ z=z_0+mt, \quad t\in\mathbf{R}. \end{cases}$ Система определяет параметрические уравнения прямой L. Выразив из последних уравнений параметр, получаем так называемые ***канонические уравнения прямой*** L: $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}.$

Пусть известны две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2),$ лежащие на прямой L. Тогда векторы $\overline{M_1M},\ \overline{M_2M}$ коллинеарные, и можно записать ***уравнения прямой, проходящей через две точки***: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$

В пространстве прямую можно задать как линию пересечения двух плоскостей: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ В уравнениях плоскостей коэффициенты при переменных не являются пропорциональными (иначе плоскости либо параллельны, либо совпадают).

О взаимном расположении двух прямых в пространстве можно судить по их направляющим векторам.

Угол между прямыми можно определить через косинус угла между направляющими векторами.

Прямые ***параллельны*** при условии коллинеарности их направляющих векторов (координаты пропорциональны).

Угол между прямыми ***прямой*** при условии перпендикулярности их направляющих векторов (скалярное произведение в этом случае равно 0).

Основы теории дифференциального и интегрального исчисления

Числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел, которая каждому натуральному числу *n* ставит в соответствие число $x_n = f(n)$. Числовую последовательность обозначают $(x_n), n \in \mathbf{N}$, x_n– ***n-й член последовательности***, а формула $x_n = f(n)$ называется ***формулой общего члена последовательности***.

Зная функцию $f(n)$ и номер *n*, можно вычислить любой член последовательности.

Последовательность, у которой все члены равны между собой, называется ***постоянной***.

Число *a* называется ***пределом последовательности*** (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такой номер $n(\varepsilon)$ (зависящий от ε), что, начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geq n(\varepsilon)$), будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon.$ Обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, а не имеющая предела – ***расходящейся***.

Геометрическая интерпретация предела: если число *a* является пределом последовательности (x_n), то в произвольную, сколь угодно малую

ε-окрестность точки a попадают все члены данной последовательности, начиная с некоторого номера $n(\varepsilon)$.

Всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Если последовательность не является ограниченной, то она не имеет предела.

Если предел последовательности равен нулю, то ее называют ***бесконечно малой***.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) сумма и произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью;

2) произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой;

3) для того чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $x_n = a + \lambda_n,$ где (λ_n) – бесконечно малая последовательность.

Последовательность называется ***бесконечно большой***, если для любого сколь угодно большого числа M найдется такой номер $n(M),$ что для всех n, начиная с этого номера $n \geq n(M),$ выполняется неравенство $|x_n| > M.$

Если последовательность (x_n) – бесконечно большая, то говорят, что она стремится к бесконечности, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty.$

Последовательность не имеет предела в двух случаях:

1) предел не определен;

2) последовательность является бесконечно большой.

Если (x_n) – бесконечно большая последовательность, то $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ – бесконечно малая последовательность.

Если (x_n) – бесконечно малая последовательность, то $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ – бесконечно большая.

Если последовательности (x_n), (y_n) имеют пределы, то справедливы следующие свойства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $C = const$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0.$

Свойства 2) и 3) обобщаются, соответственно, на любое конечное число слагаемых и множителей.

При вычислении пределов числовых последовательностей могут возникнуть ***неопределенности вида*** $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^{∞}; 0^0; ∞^0. Для того чтобы вычислить предел в случае неопределенности, необходимо тождественно преобразовать выражение, стоящее под знаком предела.

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности, x – точка из рассматриваемой окрестности. ***Приращением аргумента в точке*** x_0 называется величина $\Delta x = x - x_0$, ***приращением функции*** – величина $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Если выразить $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $f(x)$ ***в точке*** x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, при условии, что предел существует. Производную в точке обозначают $f'(x_0)$. По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, при условии, что предел существует.

Функция, имеющая производную в точке, называется ***дифференцируемой*** в этой точке. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***. Производная функции в точке – это число. Если функция дифференцируема на некотором множестве X из ее области определения, то $f'(x)$ также является функцией (ее обозначают также y'). К ***основным правилам дифференцирования*** отнесем**: п**усть $U = U(x)$, $V = V(x)$ – дифференцируемые функции, тогда справедливы формулы:

1. $C' = 0$, где $C = const$;
2. $(CU)' = CU'$, где $C = const$;
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$;
4. $(UV)' = U'V + UV'$;
5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

Также полезно знать **таблицу производных основных элементарных функций:**

1. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, в частности:
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$, в частности, $\left(e^x\right) = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
6. $(\sin x)' = \cos x$;
7. $(\cos x)' = -\sin x$;
8. $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
9. $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
12. $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

13. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$: $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha,$ где α – угол наклона касательной к оси Ox. В этом состоит ***геометрический смысл производной***.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$.

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ перпендикулярно касательной, проведенной в этой точке, называется ***нормалью*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 11.1). Уравнение нормали имеет вид: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$, где $f'(x_0) \neq 0$.

Комбинаторика и вероятность

В результате деятельности человека или процессов происходят вокруг нас различные события (действия, явления, факты). Появление того или иного события обуславливается наличием целого ряда других условий. Изучение зависимостей вокруг нас позволяет выявить взаимосвязи между этими событиями и условиями, которые, как правило, определяют их появление в той или иной ситуациях.

Всякое наблюдение дает возможность заметить, что при повторении одной и той же ситуации события каждый раз происходят по-разному. При этом отличаются они существенно или незначительно, иногда то, что мы ожидаем, может вообще не произойти. Такие события называются случайными.

Теория вероятностей является разделом математики, в котором изучаются математические модели случайных экспериментов, то есть экспериментов, исходы которых нельзя определить однозначно условиями проведения опыта. При этом предполагается, что сам эксперимент может быть повторен любое количество раз при неизменном комплексе условий.

Сформулируем некоторые определения, которые являются основными понятиями математики случайного.

Экспериментом называется возникновение определенного комплекса условий, результатом которого является тот или иной исход. Множество всех исходов называется ***пространством элементарных исходов***.

Множество всех исходов образует пространство элементарных исходов при выполнении следующих требований:

– В результате эксперимента один из исходов обязательно происходит.

– Появление одного из исходов исключает появление другого исхода этого эксперимента.

– в результате данного эксперимента элементарный исход нельзя разделить на более мелкие составляющие.

Исход любого эксперимента, то есть все то, что может произойти или не произойти в результате некоторых условий, называется ***событием***. Все события отличаются тем, что возможность их появления различима. Одно событие происходит всегда, другое никогда не происходит, а также существуют события, которые могут произойти, а могут не произойти в результате проведения одного эксперимента.

Если в результате эксперимента данное событие может наступить или не наступить, то оно называется ***случайным событием***. События обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, …

Если при некоторых условиях событие наступает всегда, то такое событие называется ***достоверным***. Достоверное событие будем обозначать символом Ω.

Событие, которое никогда не происходит в данном эксперименте, называется ***невозможным*** событием. Невозможное событие обозначается символом $\varnothing$.

Приведем примеры событий.

1) Смена календарных месяцев. Так, в перечне месяцев года после марта обязательно наступает апрель, после апреля – май, и так далее.

2) Смена дней недели. Если сегодня воскресенье, то завтра обязательно наступит понедельник. Во всех других случаях наступление понедельника невозможно.

3) Из группы студентов-первокурсников наудачу выбирают старосту группы.

4) Работа телефонной станции. Предположим, что нас интересует число вызовов, которое поступает на телефонную станцию в течение определенного временного интервала.

5) Однократное подбрасывание игральной кости. В результате эксперимента возможными исходами будут: выпадения цифр от 1 до 6 на верхней грани бросаемой кости. Таким образом, при бросании одной игральной кости выпадение цифры 8 есть событие невозможное. В то же время гарантировано выпадение цифры меньше 7.

Часто бывает полезно наглядно представить события в виде диаграммы Эйлера-Венна. Все пространство элементарных исходов данного эксперимента изобразим в виде прямоугольника (рис.1). При этом каждый элементарный исход ω соответствует точке внутри прямоугольника, а каждое событие A – некоторому подмножеству точек этого прямоугольника.

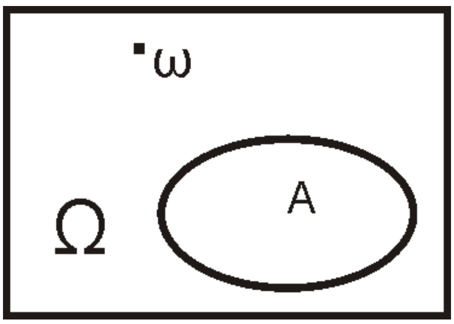


Рис. 1

Рассмотрим теперь операции над событиями, которые, по существу, совпадают с операциями (действиями) над множествами. Эти операции можно проиллюстрировать на диаграммах Эйлера-Венна.

Суммой (объединением) двух событий А и В называется событие С, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий А или В, то есть событие С состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств А или В.

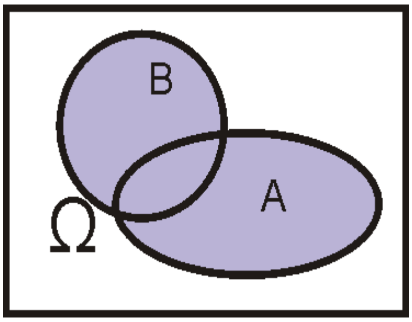


Рис. 2

Произведением (пересечением) двух событий А и В называется событие С, которое происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события А и В, то есть событие С состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат и подмножеству А и подмножеству В. События называют несовместными, если их произведение является невозможным событием.

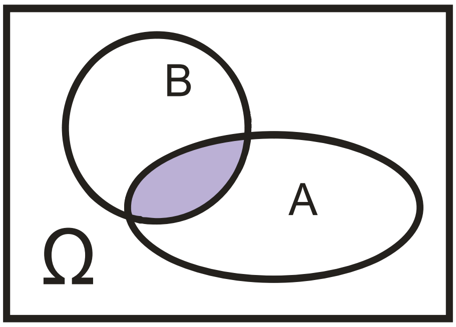


Рис. 3

Разностью двух событий А и В называется событие С, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие А, но не происходит событие В, тот есть событие С состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат подмножеству А, но не принадлежат подмножеству В.

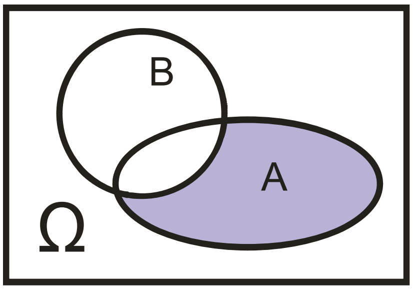


Рис. 4

Дополнением события А называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие А. Обозначается это событие $\overline{A}$.

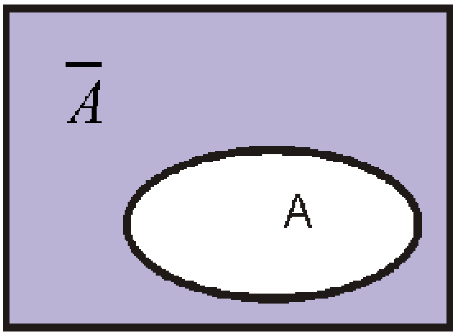


Рис. 5

Представление о случайности событий связано с возможностью предсказать заранее исход того или иного эксперимента. Однако при многократном повторении какого-либо эксперимента можно выявить некоторую определенную закономерность, которая выражается с использованием понятия вероятности. Таким образом, каждому событию можно поставить в соответствие некоторое число, которое является мерой возможности появления рассматриваемого события.

Вероятность события есть некоторая числовая характеристика возможности наступления события.

Классической вероятностью события А называют отношения числа элементарных исходов, благоприятствующих событию А, к числу равновозможных элементарных исходов данного события, то есть $p(A) = \frac{m}{n}$.

Из определения вероятности следует, что

– Вероятность достоверного события равна 1 (100%);

– Вероятность невозможного события равна 0 (0%);

– Вероятность любого случайного события есть неотрицательное число $0 \le p(A) \le 1$.

Перечислим основные теоремы (формулы), которые применимы при решении практических задач.

Теорема сложения. Пусть даны два несовместных события А и В. Тогда вероятность их суммы равна сумме вероятностей: $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Для произвольных событий верна более общая формула $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$.

Так как события $A, \overline{A}$ несовместны, $A \cdot \overline{A} = \text{O}, \text{A} + \overline{A} = \Omega$, то $1 = p(\Omega) = p(A) + p(\overline{A})$. Поэтому $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Условные вероятности. На практике часто встречаются ситуации, когда наступление некоторого события меняет возможности наступления другого события и их вероятности. Если уже произошло событие В, то новая вероятность события А называется ***условной вероятностью*** и обозначается $p_B(A)$. Условная вероятность определяется формулой $p_B(A) = \dfrac{p(A \cdot B)}{p(B)}$.

Таким образом, эта формула позволяет записать $p(A \cdot B) = p_B(A) \cdot p(B)$ и $p(A \cdot B) = p_A(B) \cdot p(A)$. Если $p_B(A) = p(A)$, то события А и В называются независимыми.

Теорема умножения. Пусть А и В – события независимые, тогда вероятность произведения таких событий равна произведению их вероятностей, то есть $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$.

Комбинаторика – это раздел математики, который исследует множества объектов произвольной природы. Все то, что можно перечислить, принято считать комбинаторным. Основной задачей комбинаторики является подсчет числа способов выполнения некоторых точно определенных операций, которые можно составить из данной совокупности объектов множества.

При решении вероятностных задач часто приходится в заданном множестве выбирать подмножества объектов, которые обладают определенными свойствами. Так, при решении задач, заключающихся в определении вероятности, наибольшую трудность представляет подсчет общего числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию.

Сформулируем **основные правила комбинаторики.**

Правило суммы. Пусть из некоторого множества элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, и так далее, элемент a_k можно выбрать n_k способами, отличными от предыдущих способов. Тогда выбор одного из элементов можно произвести $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Правило произведения. Пусть из некоторого множества элемент a_1 выбрать n_1 способами, после этого выбор элемента a_2 можно осуществить n_2 способами, и так далее, элемент a_k можно выбрать n_k способами после выбора элемента a_{k-1}, отличными от предыдущих способов. Тогда одновременный выбор элементов $a_1, a_2, ..., a_k$ в указанном порядке можно произвести $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Результат выбора m элементов из множества, содержащего n элементов, называется выборкой из n элементов по m. Если при этом элемент после выбора возвращается снова во множество, то выборку называют выборкой с возвращением. Если же выбранный элемент не участвует в дальнейшем выборе, то выборку называют выборкой без возвращения.

Выборку, в которой не учитывается порядок выбора элементов, называют ***сочетанием***, а выборку, в которой учитывают порядок выбора элементов, – ***размещением***. При этом если рассматривают выборку с возвращением, то сочетание (размещение) называют сочетанием (размещением) с повторением. А если рассматривают выборку без возвращения, то сочетание (размещение) называют сочетанием (размещением) без повторения.

Напомним, что множество называется ***упорядоченным***, если в нем указан порядок следования элементов. Так, например, множества {a, b, c} и {a, c, b} есть примеры различных упорядоченных множеств.

Пусть задано множество, состоящее из n элементов. Каждое упорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется размещением из n элементов по m элементов.

Размещение без повторений из n элементов по n элементов называют перестановкой из n элементов.

Число размещений (без повторений) из n элементов по m определяется формулой

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$ и читается «n факториал», то есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. При этом условно считается, что 0! =1. Используя это обозначение, число размещений можно записать следующим образом:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример. Некто забыл последние три цифры телефонного номера. Какое наибольшее число вариантов номеров ему нужно перебрать, чтобы дозвониться?

Очевидно, что таких номеров столько, сколько существует размещений из 10 цифр по 3, а именно: $A_{10}^3 = 720$.

Размещение из n элементов по n элементов называется перестановкой из n элементов. Число всех таких перестановок можно определить по формуле

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Пример. Требуется расставить 5 книг на полке. Сколькими способами это можно сделать?

По условию задачи порядок расстановки книг на полке может быть любым, поэтому число способов расстановки книг на полке есть число перестановок из 5: $P_5 = 5! = 120$.

Пусть задано множество, состоящее из n элементов. Каждое неупорядоченное подмножество, содержащее m элементов, называется сочетанием из n элементов по m элементов. Для определения числа сочетаний из n элементов по m элементов используют формулу $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Данное число обладает свойством $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Пример. Группа студентов состоит из 20 человек. Для дежурства по институту наудачу выбирают 3 студентов. Сколькими способами это можно сделать?

Для решения поставленной задачи достаточно заметить, что, поскольку порядок выбора студентов не существенен, то число всевозможных исходов – это есть число сочетаний из 20 студентов по 3, то есть $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{3! \cdot (20-3)!} = 1140$

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. План практических занятий

2.1.1. Введение в теорию множеств

Цель занятия: Освоить общематематическую терминологию теории множеств, научиться давать формальные определения и приводить свои примеры различных множеств, а также записывать различные множества на практике и работать с этими записями на конкретных примерах.

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие множества, подмножества.
2. Операции над множествами.
3. Способы задания множеств.
4. Числовые множества. Некоторые обозначения.
5. Задания для самостоятельного выполнения.

Задания:

1. Пусть $A = [-2, 3]$, $B = (-\infty, 0)$, $C = [0, 4)$. Найдите множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cup C$; 4) $B \cap C$;

5) $(A \cup B) \cap C$; 6) $A \cup (B \cap C)$; 7) $\mathrm{A} / (B \cap C)$.

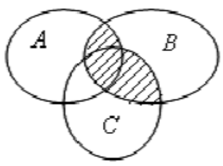
2. Пусть A – множество натуральных делителей числа 15; B – множество простых чисел, меньших 10; C – множество четных чисел, меньших 9. Найдите множество:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $B \cap C$;

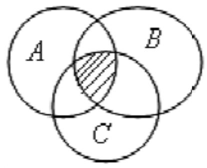
4) $(A \cup C) \cap B$; 5) $A \cup (C \cap B)$; 6) $A \cap B \cap C$.

3. Запишите, с помощью каких операций над множествами *A, B, C* получено заштрихованное множество на рис:

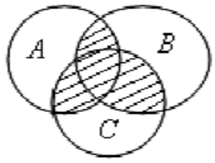
1)



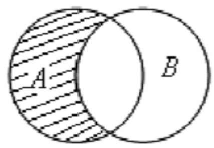
2)



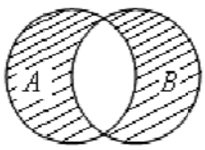
3)



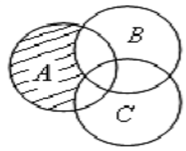
4)



5)



6)



4. Пусть $A=[-\infty;2]$, $B=[-3;5)$ – подмножества универсального множества U = **R**. Найдите множество:

1) $A\cup\overline{B}$; 2) $\overline{A}\cap B$; 3) $\overline{A\cup B}$; 4) $\overline{A}\cap\overline{B}$.

2.1.2. Основы логики

Цель занятия: Научиться давать формальные определения и приводить свои примеры различных логических действий над высказываниями, а также строить записи математических утверждений и работать с этими записями на конкретных примерах.

Рассматриваемые вопросы:

1. Высказывания. Виды высказываний.
2. Основные логические операции. Таблицы истинности.
3. Метод включения и исключения.
4. Задания для самостоятельного выполнения.

Задания:

1. Укажите, какое предложение определяет высказывание:
   1) Пусть всегда будет солнце!
   2) Минск – столица Болгарии.

3) Число 7 больше числа 5.

4) Ты идешь сегодня в институт.

5) Выражение x^2 принимает значения больше нуля или равно нулю.

2. Определите тип высказывания (простое или сложное):

1) Если сумма углов четырехугольника равна 360°, то четырехугольник является квадратом.

2) Квадрат является ромбом.

3) Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда сумма двух его сторон больше третьей стороны.

4) Если высота треугольника проведена к основанию, и она является медианой, то треугольник – равнобедренный.

5) Число 15 делится нацело на 7.

6) Если в четырехугольнике стороны попарно параллельны или попарно равны, то такой четырехугольник является параллелограммом.

3. Даны высказывания:

1) A: развернутый угол равен 180°.

2) B: число 7 является четным.

3) C: Беларусь – европейская страна.

4) D: Минск – столица Беларуси.

Сформулируйте высказывания: $A \Rightarrow B$, $\overline{B} \Rightarrow A$, $C \Leftrightarrow D$, $C \Rightarrow (A \vee B)$.

4. Введите обозначения буквами всех простых высказываний, приведенных в задании 2. Запишите символически сложные высказывания с помощью операций над высказываниями. Определите их значение (И или Л).

5. Установите, равны ли по значению пары высказываний:

1) $A, \overline{A}$; 2) $A \vee B, \overline{A \wedge B}$; 3) $A \wedge B, \overline{A \vee B}$.

6. Приведите пример конкретных высказываний *A, B, C*, которые соответствовали бы содержательно высказываниям:

1) $(A \vee B) \Rightarrow C$; 2) $A \Leftrightarrow (B \wedge C)$.

7. Было опрошено 70 человек. В результате опроса выяснили, что 45 знают английский язык, 29 – немецкий и 9 человек – оба языка. Сколько человек из опрошенных не знают ни английского, ни немецкого?

8. В результате опроса 70 человек выяснили: 45 знают английский, 31 – немецкий, 52 – испанский. Три языка знают 8 человек, английский и испанский- 28, а английский и немецкий – 16, немецкий и испанский – 20. Сколько из опрошенных не знают ни одного языка?

9. Староста группы дал сведения в деканат о студентах: «В группе учатся 45 студентов, в том числе 25 мальчиков. 30 студентов учатся хорошо, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 студентов, из них 18 мальчиков и 17 хорошо успевающих студентов. 15 мальчиков в группе учатся хорошо и в то же время занимаются спортом. Найти чему равно число слабо успевающих девочек, не занимающихся спортом?

10. В отделе института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский? Только французский?

11. В группе учатся 28 студентов, каждый из которых умеет кататься на лыжах или на коньках. При этом 20 человек умеют кататься на лыжах, 15 человек – на коньках. Определите, сколько студентов умеют кататься и на коньках, и на лыжах.

12. Задано некоторое количество натуральных чисел, которые кратны или числу 2, или числу 3. Известно, что числу 2 кратны 10 чисел; числу 3 кратны 7 чисел; и числу 2, и числу 3 кратны 4 числа. Определите общее количество заданных чисел.

13. Все 25 человек класса сходили в театр или на выставку. Известно, что 20 человек были на выставке, 10 человек – и в театре, и на выставке. Сколько человек было в театре?

14. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский, 45 французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

15. В кондитерском отделе супермаркета посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

16. В первом туре республиканской олимпиады участвовали 100 студентов, из них 70 человек получили право участвовать во втором туре олимпиады по экономике, 45 – по математике. Известно, что 23 человека могут участвовать во втором туре и по экономике, и по математике. Сколько студентов не допущено ко второму туру ни по экономике, ни по математике?

2.1.3. Матрицы и определители

Цель занятия: Освоить общематематическую терминологию алгебры матриц, научиться решать прикладные задачи с помощью операций над матрицами и применяя системы линейных уравнений.

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие матрицы, виды матриц.

2. Действия над матицами.

3. Определитель матрицы, правила вычисления.

4. Обратная матрица, алгоритм ее нахождения.

5. СЛАУ, методы решения.

6. Задания для самостоятельного выполнения.

Задания:

1. Найдите линейную комбинацию $3A + 2B$ матриц A и B, если:

1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; 2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Вычислите:

1) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 0\\2 & 4\\1 & -5\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}3 & -2\\5 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\4 & 3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\3 & 1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. Пусть $A=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\0 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$. Найдите $B^T\cdot A$.

4. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 4\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}x-y & x+y\\x+y & x-y\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}\sin\varphi & \cos\varphi\\-\cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}$.

5. Вычислите определитель с помощью правила треугольников:

1) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\2 & -1 & 3\\-3 & 2 & 1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}3 & 4 & -5\\8 & 7 & -2\\2 & -1 & 8\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 4 & 2\\-1 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

6. Найдите миноры M_{11}, M_{21} и алгебраические дополнения A_{13}, A_{32} для матрицы $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 4\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

7. Вычислите определитель, используя разложения по любой строке или по любому столбцу:

1) $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 3 & 4\\-1 & 2 & 1\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 2 & 3\\3 & -2 & 2\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}a & b & c\\1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -2 & 4\\3 & 0 & 2\end{vmatrix}$.

8. Найдите обратные матрицы для следующих матриц:

1) $\begin{bmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & -1\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$.

9. Запишите систему в матричном виде. Запишите расширенную матрицу для каждой системы и с помощью элементарных преобразований приведите ее к ступенчатому виду:

1) $\begin{cases} x+2y=1. \\ 2x-3y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y-1=0, \\ 2x+5y+2=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=4, \\ 2x_1+3x_2-x_3=5, \\ 2x_2+3x_3=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3-4=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2+x_3-5=0. \end{cases}$

10. Используя формулы Крамера и метод обратной матрицы, решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+2y=6, \\ x-y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+x-1=0, \\ y-x-1=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y-z=2, \\ 2x-y+4z=1, \\ -x+6y+z=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3y-z=6, \\ x-y+7z=8, \\ 3x-y+2z=7. \end{cases}$

2.1.4. Общие понятия аналитической геометрии

Цель занятия: Освоить основные понятия геометрических объектов на плоскости и в пространстве, изучить их свойства. Научиться решать геометрические задачи, которые используют эти понятия на практике.

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие вектора.

2. Действия над векторами.

3. Скалярное произведение векторов.

4. Угол между векторами.

5. Взаимное расположение векторов.

6. Уравнения прямой на плоскости.

7. Взаимное расположение прямых на плоскости.

8. Различные уравнения плоскости в пространстве.

9. Взаимное расположение плоскостей.

10. Расстояние от точки до плоскости.

11. Расстояние между плоскостями.

12. Угол между плоскостями.

13. Прямая в пространстве.

14. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Задания:

1. Определите, сколько различных векторов задают упорядоченные пары точек, составленные из вершин: 1) треугольника; 2) параллелограмма.

2. В плоскости треугольника ABC взята точка O. Отложите от нее вектор: 1) $\overline{OA}-\overline{OB}$; 2) $-\overline{OA}-\overline{OC}$; 3) $\overline{OA}+\overline{OB}-\overline{OC}$.

3. По заданным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ постройте их линейные комбинации:

1) $2\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-2\overline{b}$; 3) $\frac{1}{3}\overline{a}+2\overline{b}$; 4) $\overline{b}-\overline{a}$.

4. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=5$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=60°$; 2) $|\overline{a}|=|\overline{b}|=1$, $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=135°$;

3) $|\overline{a}|=5, |\overline{b}|=2$, $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$; 4) $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=3$, $\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$.

5. Зная, что $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=2$, $\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$, вычислите: 1) $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$; 2) $\left(\overline{a}\right)^2$;

3) $\left(\overline{b}\right)^2$; 4) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^{2;}$; 5) $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)^2$; 6) $\left(\overline{a}-2\overline{b},\ 3\overline{a}+\overline{b}\right)$.

6. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{m}+\overline{n}$ и $\overline{b}=\overline{m}-2\overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 60°.

<u>Задания к теме «Операции над векторами в координатной форме»</u>

1. Известно, что $A(2, -7)$, $B(4, 1)$. Найдите:

1) координаты вектора $\overline{AB}$; 2) $|\overline{AB}|$; 3) орт вектора $\overline{AB}$.

2. Даны векторы $\overline{a}=(1,\ \lambda)$, $\overline{b}=(\lambda,\ 9)$. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарные.

3. Заданы векторы $\overline{a_1}=(-1,\ 2)$, $\overline{a_2}=(3,\ 1)$, $\overline{a_3}=(1,\ 4)$. Вычислите:

1) $|\overline{a_1}|$, $|\overline{a_2}|$, $|\overline{a_3}|$; 2) орты векторов $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$;

3) координаты вектора $\overline{a}=\overline{a_1}-2\overline{a_2}+\overline{a_3}$.

4. Вычислите скалярное произведение векторов, заданных своими координатами:

1) $\bar{a}=(1,\ 2),\ \ \bar{b}=(2,\ 3);$ 2) $\bar{a}=(2{,}8;\ 3{,}1),\ \ \bar{b}=(5;\ 10).$

5. Найдите угол между векторами:

1) $\bar{a}=(3,\ 3),\ \ \bar{b}=(3,\ 0);$ 2) $\bar{a}=(2,4),\ \ \bar{b}=(-4,\ -8).$

6. Известно, что вектор $\bar{c}=(2m,\ 17)$ является суммой векторов $\bar{a}=(-7,\ 2),\ \ \bar{b}=(3,\ -5n).$ Найдите m и n.

7. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(2,\ 1)$, $B(-1,\ 3)$ и $C(4, -2)$.

8. Даны три вершины $A(3, -4)$, $B(-5, 3)$ и $C(1, 2)$ параллелограмма $ABCD$. Найдите его четвертую вершину D.

9. Даны вершины треугольника $A(3, -1)$, $B(4, 2)$ и $C(-4, 0)$. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A.

Задания к теме «Прямая на плоскости»

1. Составьте общее, каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей:

1) через точку $M_0(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\bar{a}=(3,-1);$

2) через точку $M_0(-2, 3)$ параллельно вектору $\bar{b}=(5,-2);$

3) через две точки $M_1(-1, 3)$ и $M_2(2, -3)$.

2. Составьте уравнение «в отрезках» прямой $2x + 3y - 6 = 0$. Построить ее на плоскости.

3. Определите угловой коэффициент прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}$ и постройте ее в прямоугольной системе координат Oxy.

4. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1-4t, \\ y = 3+t. \end{cases}$$

Найдите:

1) направляющий вектор прямой;

2) координаты точек, для которых $t_1 = 3$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$;

3) значения параметра t для точек пересечения прямой с осями координат;

4) среди точек $A(-3, 4)$, $B(1, 1)$, $C(9, 1)$ – принадлежащие данной прямой.

5. Определите, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются (в случае пересечения, найти точку пересечения и угол, под которым пересекаются прямые):

1) $2x + 3y - 8 = 0$ и $4x + 6y - 10 = 0$;

2) $2x + 3y - 8 = 0$ и $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2}$;

3) $2x + 3y - 8 = 0$ и $\frac{x}{4} + \frac{3y}{8} = 1$.

6. Дан треугольник ABC: $A(1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, 7)$. Напишите уравнения сторон и медианы этого треугольника, проведенной из вершины A.

7. Даны середины $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$, $M_3(5, -1)$ сторон треугольника. Составьте уравнения сторон этого треугольника.

8. Пусть точки $A(1, 5)$, $B(-4, 3)$, $C(2, 9)$ являются вершинами треугольника ABC. Составьте уравнение высоты, проведенной из вершины A к стороне BC.

9. Даны уравнения сторон параллелограмма: $x + y - 2 = 0$, $2x - y + 4 = 0$ и точка $M(3, 1)$ пересечения его диагоналей. Составьте уравнения двух других сторон параллелограмма.

10. Найдите расстояние от точки $M(2, -1)$ до прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$ и $B(3, 4)$.

11. Даны вершины треугольника $A(2, 5)$, $B(1, 3)$, $C(7, 0)$. Вычислите длины его высот.

<u>Задания к теме «Плоскость в пространстве»</u>

1. Составьте параметрические уравнения плоскости, которая проходит через:

1) точку $M_0(1, 0, 2)$ параллельно векторам $\overline{a_1} = (1, 2, 3)$ и $\overline{a_2} = (0, 3, 1)$;

2) точку $A(1, 2, 1)$ параллельно векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$;

3) три точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, 4, 4)$ и $C(3, 3, 1)$;

4) начало координат и точки $M_1(1,\ 0,\ 1)$ и $M_2(-2,\ -3,\ 1)$.

2. Составьте общее уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку $M_0(1,\ 1,\ 1)$ параллельно векторам $\overline{a_1}=(1,\ 2,\ 0)$ и $\overline{a_2}=(0,\ 1,\ 3)$;

2) точки $M_1(1,\ 0,\ 1)$, $M_2(0,\ 2,\ 3)$ и $M_3(0,\ 2,\ 1)$;

3) точку $M_0(1,\ 2,\ -2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(2,\ -1,\ 3)$.

3. Найдите величины отрезков, отсекаемых на координатных осях плоскостью:

1) $2x+3y-9z+18=0$; 2) $x-2y+5z-20=0$. Построить плоскость в пространстве.

4. Известны координаты вершин тетраэдра $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(3,\ 0,\ 5)$, $C(1,\ 1,\ 0)$ и $D(4,\ 1,\ 2)$. Составьте уравнения его граней.

5. Определите, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны, совпадают:

1) $x-y+3z+1=0$ и $2x-y+5z-2=2$; 2) $2x+y+2z+4=0$ и $4x+2y+4z+8=0$;

3) $3x+2y-z+2=0$ и $6x+4y-2z+1=0$. В случае пересечения найти угол между плоскостями.

6. Найдите отклонения и расстояния от каждой из точек $M_1(1,\ 2,\ 3)$, $M_2(8,\ -1,\ 2)$ и $M_3(3,\ 0,\ 5)$ до плоскости $x-2y-2z+6=0$.

7. Найдите расстояние между параллельными плоскостями:

1) $x-2y-2z+7=0$ и $2x-4y-4z+17=0$; 2) $6x+2y-4z+15=0$ и $9x+3y-6z+10=0$.

<u>Задания к теме «Прямая в пространстве»</u>

1. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через:

1) точку $M_0(2,\ 0,\ 3)$ параллельно вектору $\overline{a}=(3,\ -2,\ -2)$;

2) точку $M_0(1,\ 2,\ 3)$ параллельно оси Oy;

3) точки $M_1(1,\ 2,\ -1)$ и $M_2(-2,\ 4,\ 0)$.

2. Определите, какие из точек $A(2,\ 1,\ 5)$, $B(0,\ 4,\ 3)$ и $C(3,\ 4,\ 37)$ принадлежат прямой

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 5 + 2t. \end{cases}$$

3. Определите по параметрическим уравнениям точку, принадлежащую прямой, направляющий вектор и запишите канонические уравнения этой прямой:

1) $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 5, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 5 + t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3, \\ z = 7t. \end{cases}$

4. Определите по каноническим уравнениям точку, принадлежащую прямой, направляющий вектор и запишите параметрические уравнения этой прямой:

1) $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+2}{7}$; 2) $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-1}{4}$; 3) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z}{3}$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(3,7,5)$, $B(1,2,3)$ и $C(3,0,1)$. Составьте параметрические уравнения его медиан.

6. Дан треугольник с вершинами $A(1,–2,–4)$, $B(3,1,–7)$ и $C(5,1,–7)$. Составьте канонические уравнения его высот.

<u>Задания к теме «Прямая и плоскость в пространстве»</u>

1. Найдите точку пересечения прямой L с плоскостью P или установите их параллельность:

1) $L: \begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 - t, \end{cases}$ $P: 4x + y - z + 13 = 0;$ 2) $L: \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t, \end{cases}$ $P: x + y - z + 3 = 0;$

3) $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$, $P: 4x + 3y - z + 3 = 0;$

4) $L: \dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$, $P: 3x - y + 2z - 5 = 0;$

2. Найдите угол между прямой и плоскостью:

1) $\begin{cases} x = 1 + 11t, \\ y = 2 - 7t, \\ z = 5 - 8t \end{cases}$ и $7x - 8y + 2z - 10 = 0$;   2) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$;

3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oz параллельно прямой $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t, \\ z = 3t + 1. \end{cases}$

4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,\ 2,\ 1)$ и перпендикулярной плоскости $3x + 7y - 2z + 5 = 0.$

5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,\ 2,\ -2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-6}{-3} = \dfrac{z-3}{2}.$

Основы теории функций

Цель занятия: Освоить основные понятия теории функций, изучить правила дифференцирования и использование производной при исследовании функции и построения ее графика.

Рассматриваемые вопросы:

1. Понятие функции, ее предел. Основные понятия.

2. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

3. Правила дифференцирования.

4. Непрерывность функции.

5. Монотонность функции. Точки экстремума.

6. Выпуклость (вогнутость) функции. Точки перегиба.

7. Асимптоты графика функции.

Задания:

Дана функция $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 2$ на отрезке [-4;5]. Для заданной функции найти:

1. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=2 и построить ее.

2. Найти производную третьего порядка в точке x=3;

3. Исследовать функцию на монотонность, найти точки экстремума;

4. Исследовать функцию на выпуклость (вогнутость), найти точки перегиба;

5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке;

6. Схематически изобразить график функции.

2.1.6. Комбинаторика и вероятность

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Проверочные работы

3.1.1. Проверочная работа по теме «Множества. Логические действия над высказываниями»

1. Приведите пример простого высказывания. Постройте его отрицание.

2. Приведите свой пример сложного высказывания и напишите его символьную схему.

3. Приведите пример конкретных высказываний *A, B, C*, которые соответствовали бы содержательно высказыванию согласно схеме

$(A \wedge B) \Rightarrow C$.

4. Выясните истинность высказывания $\overline{(\overline{A \wedge B}) \vee (B \wedge C)}$, если B и C истинны.

5. Записать множество всех двузначных чисел кратных 5, не больших 27.

6. Сколько различных подмножеств множества из задания 5 существует? Записать все множества объема 2.

7. Пусть даны подмножества $A = [-3; 7], B = (-\infty; 0), C = (4; 5]$ множества всех действительных чисел. Найдите множества

$A \cup B, A \cap B,\ A \cap \bar{C}, (A \cap B) \cup C$.

8. На первом курсе учатся 110 студентов. Из них своевременно сдали зачет по математике 75 человек, а по философии – 85 человек. Оба зачета сдали 60 человек. Сколько студентов не сдали зачет ни по математике, ни по философии?

9. В группе из 100 человек 70 человек имеют карий цвет глаз, 45 брюнеты и 8 человек не являются кареглазыми и брюнетами. Сколько человек в группе кареглазые брюнеты?

10. В кондитерском отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 13 человек купили и торт, и коробку конфет?

3.1.2. Проверочная работа по теме «Матрицы и определители»

Вариант 1

1. Дайте определение матрицы, назовите виды матриц.

2. Назовите линейные операции над матрицами.

3. Найдите линейную комбинацию двух матриц $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, если $\alpha = -2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. Что такое определитель квадратной матрицы? Запишите формулу для вычисления определителя 2-го порядка.

2. Вычислите определитель второго порядка: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$.

3. Сформулируйте свойство, которое можно использовать для вычисления определителя 2-го порядка $\begin{vmatrix} -16 & 20 \\ -64 & 100 \end{vmatrix}$. Вычислите определитель, используя его свойства.

Вариант 3

1. В каких случаях определитель квадратной матрицы равен нулю?

2. Сформулировать правило Саррюса (нарисовать схему).

3. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ (любым из способов).

Вариант 4

1. Какая матрица называется обратной заданной?

2. Для какой матрицы можно построить обратную? Определите, существует ли матрица, обратная матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Запишите формулу для вычисления элементов обратной матрицы.

Вариант 5

1. Приведите пример системы линейных алгебраических уравнений.

2. Что называется решением системы?

3. Дана расширенная матрица системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 5 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$. Запишите систему, соответствующую данной матрице и решите ее.

Вариант 6

1. Записать систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде. Запишите формулу для нахождения неизвестных с помощью обратной матрицы.

2. В каком случае система линейных алгебраических уравнений может быть решена матричным способом?

3. Запишите систему $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 3x - 2y = 3; \end{cases}$ в матричном виде и определите, может ли быть она решена с помощью обратной матрицы?

Вариант 7

1. Какая система называется квадратной?

2. Сформулировать теорему Крамера и записать формулы Крамера.

3. Пользуясь формулами Крамера, решите систему $\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ 3y - 4x = 0 \end{cases}$.

Вариант 8

1. Дайте определение матрицы, назовите виды матриц.

2. Назовите линейные операции над матрицами.

3. Найдите линейную комбинацию двух матриц $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, если $\alpha = -2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 9

1. Что такое определитель квадратной матрицы? Запишите формулу для вычисления определителя 2-го порядка.

2. Вычислите определитель второго порядка: $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$.

3. Сформулируйте свойство, которое можно использовать для вычисления определителя 2-го порядка $\begin{vmatrix} -16 & 20 \\ -64 & 100 \end{vmatrix}$. Вычислите определитель, используя его свойства.

Вариант 10

1. В каких случаях определитель квадратной матрицы равен нулю?

2. Сформулировать правило Саррюса (нарисовать схему).

3. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ (любым из способов).

3.1.4. Проверочная работа по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Вариант 1

Дана функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$.

1. Найти производную второго порядка в точке x=-3

2. Найти точки экстремума.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=-1 и построить ее.

Вариант 2

Дана функция $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5$ на отрезке [-2;1].

1. Найти производную второго порядка в точке x=4.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=-2 и построить ее.

Вариант 3

Дана функция $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + +8$.

1. Найти производную второго порядка в точке x=2.

2. Найти точки экстремума.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=0 и построить ее.

Вариант 4

Дана функция $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 2$ на отрезке [-2;1].

1. Найти производную третьего порядка в точке x=3.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=2 и построить ее.

Вариант 5

Дана функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$.

1. Найти производную второго порядка в точке x=-3

2. Найти точки экстремума.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=-1 и построить ее.

Вариант 6

Дана функция $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5$ на отрезке [-2;1].

1. Найти производную второго порядка в точке x=4.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=-2 и построить ее.

Вариант 7

Дана функция $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + +8$.

1. Найти производную второго порядка в точке x=2.

2. Найти точки экстремума.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=0 и построить ее.

Вариант 8

Дана функция $f(x)=3x^3-9x^2+2$ на отрезке [-2;1].

1. Найти производную третьего порядка в точке x=3.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=2 и построить ее.

Вариант 9

Дана функция $f(x)=2x^3-3x^2-36x+40$.

1. Найти производную второго порядка в точке x=-3

2. Найти точки экстремума.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=-1 и построить ее.

Вариант 10

Дана функция $f(x)=2x^3+6x^2+5$ на отрезке [-2;1].

1. Найти производную второго порядка в точке x=4.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

3. Записать уравнение касательной к графику функции в точке x=-2 и построить ее.

3.2. Вопросы для подготовки к экзаменам и зачетам

1. Матрицы, основные определения. Действия над матрицами.

2. Определитель матрицы. Свойства определителей.

3. Обратная матрица и её построение, свойства обратной матрицы.

4. Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Матричная форма записи СЛУ. Формулы Крамера.

5. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости, в пространстве. Изображение точек. Расстояние между точками.

6. Понятие вектора, операции над векторами. Длина вектора.

7. Скалярное произведение векторов и его свойства. Угол между векторами, условие перпендикулярности векторов.

8. Векторное произведение векторов и его свойства.

9. Смешанное произведение векторов и его свойства.

10. Прямая на плоскости. Основные виды.

11. Взаимное расположение прямых на плоскости.

12. Уравнения плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.

13. Уравнения прямой в пространстве.

14. Понятие множества. Операции над множествами.

15. Алгебра высказываний. Виды высказываний.

16. Логические операции над высказываниями.

17. Основы комбинаторики: основные правила комбинаторики. Комбинации объектов.

18. Понятие функции. Область определения и множество значений функции. Способы задания функций. График функции.

19. Предел функции, свойства.

20. Производная функции, ее геометрический смысл.

21. Понятие события, случайные события.

22. Действия над событиями.

23. Основные теоремы вероятностей.

24. Понятие случайной величины. Законы распределения случайных величин. Числовые характеристики случайных величин.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Учебная программа

ЧАСТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"ИНСТИТУТ СОВРЕМЕННЫХ ЗНАНИЙ ИМЕНИ А.М. ШИРОКОВА"

УТВЕРЖДАЮ
Ректор Института современных знаний
имени А.М.Широкова
___________________ А.Л. Капилов
____
(дата утверждения)
Регистрационный № УД-______/уч.

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности
1-19 01 01 Дизайн (по направлениям)

2017 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-19 01 01-2013 и учебного плана Института современных знаний имени А.М.Широкова для специальности 1-19 01 01 Дизайн (по направлениям)

СОСТАВИТЕЛЬ:

С.Н.Жук, старший преподаватель кафедры высшей математики и информатики Частного учреждения образования «Институт современных знаний имени А. М. Широкова».

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Захаров В.В., доцент кафедры интеллектуальных информационных технологий Учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, кандидат технических наук ;

Петров В.А., доцент кафедры информационных технологий Учреждения образования «Минский инновационный университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей математики и информатики Института современных знаний имени А.М.Широкова
(протокол № 5 от 27 ноября 2017 года);
Научно-методическим советом Института современных знаний имени А.М.Широкова
(протокол № 2 от 20 декабря 2017 года)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Стремительная математизация и компьютеризация практически всех областей знания требует перестройки системы математического образования в высшей школе. Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки любого специалиста. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

Цель дисциплины – изучение математических понятий и конструкций, обеспечивающую широкий спектр их применимости, точность формулировок математических свойств изучаемых объектов, логическую строгость изложения математических выкладок, опирающуюся на адекватный современный математический язык.

Для достижения этой цели необходимо решение следующих учебных задач:

– научиться использовать математику как метод мышления, как язык, как средство формулирования и организации понятий;

– усвоение знаний о математических моделях, об обличии тривиальных и частных от глубоких и общих;

– изучение методов моделирования.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

знать:

– основные математические понятия и модели, применяемые в современной цивилизации и в мировой культуре;

– понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке;

уметь:

– уметь логически мыслить и оперировать абстрактными понятиями, понимать место точных формулировок;

– уметь обходиться описательными определениями;

– уметь формулировать, формализовывать и решать с помощью компьютера основные математические задачи;

– уметь строить простейшие математические модели и ориентироваться в возможностях их реализации на вычислительной технике;

владеть:

– математическими понятиями и символами для выражения количественных и качественных отношений.

Студент должен иметь представление о значительном числе математических понятий, что даст ему возможность корректного применения математики в практической деятельности и позволит безболезненно повышать свою квалификацию.

Освоение образовательной программы по учебной дисциплине «Основы высшей математики» должно обеспечить формирование следующих академических компетенций:

АК-1 - владеть базовыми научно-теоретическими знаниями в области художественных, научно-технических, общественных, гуманитарных, экономических дисциплин и применять их для решения теоретических и практических задач профессиональной деятельности;

АК-2 - владеть методикой системного и сравнительного анализа, междисциплинарным подходом к решению проблем, находить решения на стыке разных дисциплин, связанных с теорией и практикой дизайна;

АК-3 - владеть исследовательскими навыками;

АК-4 - уметь работать самостоятельно;

АК-6 - владеть междисциплинарным подходом при решении проблем;

АК-7 - иметь навыки использования современных технических средств обработки информации;

АК-9 - уметь учиться, быть расположенным к постоянному повышению профессиональной квалификации.

Также студент должен приобрести следующие социально-личностные компетенции:

СЛК-2 - совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень, повышать проектно-художественное мастерство;

СЛК-6 - быть способным к критике и самокритике.

После изучения учебной дисциплины студент должен владеть следующими профессиональными компетенциями и быть способным:

ПК-2 - осуществлять дизайн-проектирование с учетом соотношения смыслообразующих и формообразующих факторов (художественно-формальных, эргономических, инженерно-психологических, технологических, конструктивных, экологических, социально-культурных, экономических) в условиях как аналогового, так и безаналогового проектирования;

ПК-3 - формировать выразительное образное решение объекта средствами компьютерного моделирования;

ПК-4 - осуществлять прогностическое дизайн-проектирование с использованием инновационных технологий;

ПК-5 - осуществлять экспертную оценку уровня дизайнерского решения по основным смыслообразующим и формообразующим факторам;

ПК-6 - адаптироваться к изменению объекта профессиональной деятельности, как в пределах специализации, так и направление специальности;

ПК-7 - осуществлять развитие научно-теоретической и практической базы обеспечения дизайн-деятельности;

ПК-9 - собирать, анализировать и систематизировать профессиональный опыт в области дизайн-деятельности;

ПК-10 - выявлять общие закономерности функционирования и развития дизайн-деятельности на основе выбранного факто логического материала;

ПК-11 - анализировать композиционные, конструктивные, технологические, эргономические и колористические решения продуктов дизайн-деятельности;

ПК-12 - анализировать результаты собственных дизайн-решений;

ПК-18 - уметь проектировать, организовывать, анализировать процесс педагогического взаимодействия при освоении профессиональных компетенций по направлению специальности.

В соответствии с учебными планами для очной (дневной) формы обучения по специальности «Дизайн (по направлениям)» данная дисциплина изучается во втором семестре. Общее количество часов – 72, из которых аудиторные занятия составляют 34 часа – для дневной формы обучения.

Распределение аудиторных часов по видам занятий для дневной формы обучения: 20 часов лекций и 14 часов практических занятий.

Текущая аттестация по дисциплине для дневной формы обучения проводится во втором семестре в форме зачета.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Математика как элемент общей культуры

Математика как составная часть мировой культуры. Математика как основной инструмент познания реальной действительности. Этапы развития математики. Роль современной математики в гуманитарном образовании.

Тема 2. Введение в теорию множеств

Понятие множества. Способы задания множеств. Операции над множествами. Геометрическая интерпретация операций над множествами.

Отношения: основные определения. Свойства отношений.

Тема 3. Основы логики

Алгебра высказываний. Логические операции над высказываниями. Таблицы истинности логических функций.

Основные понятия теории графов.

Тема 4. Матрицы и определители

Матрицы, основные определения. Действия над матрицами: линейные действия над матрицами, умножение матриц, транспонирование матрицы.

Определители второго и третьего порядков.

Системы линейных уравнений. Методы их решения.

Постановка задач моделирования. Классификация моделей. Методы оптимизации. Теории игр и статистических решений.

Тема 5. Общие понятия аналитической геометрии

Декартовы прямоугольные система координат на плоскости. Направленные отрезки и векторы. Коллинеарные векторы. Равенство векторов. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах. Угол между векторами, условие перпендикулярности векторов. Прямая на плоскости. Параметрическое уравнение прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Плоские фигуры второго порядка. Общее уравнение окружности. Эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве. Плоскость. Уравнение плоскости. Поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

Тема 6. Основы теории функций

Понятие функции. Область определения и множество значений функции. Способы задания функций. График функции. Элементарные функции и их графики. Понятие предела функции. Непрерывность функции и ее геометрическая интерпретация.

Производные функции одной переменной. Производные основных элементарных функций. Геометрический смысл производной. Правила дифференцирования. Возрастающие (убывающие) функции. Точки экстремума. Выпуклость функции, точки перегиба. Асимптоты. Применение производной функции к исследованию функции и построению графика функции.

Тема 7. Интегральное исчисление

Понятие первообразной. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основный интегралов. Методы нахождения неопределенного интеграла.

Определенный интеграл. Геометрическая интерпретация определенного интеграла. Теорема Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла, методы вычисления определенных интегралов.

Тема 8. Комбинаторика и вероятность

Основы комбинаторики: основные правила комбинаторики. Комбинации объектов.

Основные понятия теории вероятностей: случайные события, вероятность. Действия над событиями. Основные теоремы вероятностей (теорема сложения и умножения). Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Понятие случайной величины. Законы распределения случайных величин. Числовые характеристики случайных величин и их вероятностный смысл.

Основные понятия математической статистики. Методы анализа статистических зависимостей.

Тема 9. Математика и культура

Математические модели и методы в культуре. Роль моделирования в информационных процессах культуры и искусства. Задачи современного моделирования в культуре и искусстве.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Самостоятельная работа студентов (СРС)	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	Математика как элемент общей культуры	1					2	Самостоятельная работа
2	Введение в теорию множеств	2	4				6	Практическая работа
3	Основы логики	2					4	Самостоятельная работа
4	Матрицы и определители	2	2				6	Тест
5	Общие понятия аналитической геометрии	4	4				8	Контрольная работа
6	Основы теории функций	2	2				2	Опрос
7	Интегральное исчисление	2					4	Самостоятельная работа
8	Комбинаторика и вероятность	4	2				4	Практическая работа
9	Математика и культура	1					2	Тест
	Итого	**20**	**14**				**38**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. *Белявский, С.С.* Высшая математика: решение задач: учебное пособие для студентов экономических специальностей / С.С. Белявский, Н.А. Широкова – Минск: Вышэйшая школа, 2004. – 285 с.

2. *Гусак, А.А.* Высшая математика. В двух томах. Т. 1: учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2000. – 543 с.

3. *Гусак, А.А.* Задачи и упражнения по высшей математике: Ч.1: Для вузов / А.А. Гусак. - Минск: Вышэйшая школа, 1988. – 247 с.

Дополнительная

1. *Волошин, А.И.* Математика и искусство / А.И. Волошин – М., 2004. – 209 с.

2. *Воронов, М.В.* Математика для студентов гуманитарных факультетов / М.В. Воронов, Г.П. Мещерякова. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2002. – 374 с.

3. *Гресс, П.В.* Математика для гуманитариев. Учебное пособие / П.В.Гресс. – М., 2000. – 265с.

4. *Плис, А.И.* MathCAD: математический практикум: учебное пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина – М.: Финансы и статистика, 2000. – 362 с.

5. *Шикин, Е.В*. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. (Гуманитариям о математике). Учебник / Е.В. Шикин. – М., 2001. – 270 с.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Дневная форма обучения

1. Применение основных понятий теории множеств при решении задач комбинаторики.
2. Элементы комбинаторики.
3. Метод включения и исключения.
4. Построение таблиц истинности.
5. Действия над матрицами.
6. Вычисление определителей матриц.
7. Методы решения систем линейных уравнений.
8. Применение матриц при решении задач моделирования.
9. Операции над векторами. Их применение.
10. Линии первого порядка на плоскости. Их взаимное расположение.
11. Линии второго порядка на плоскости.
12. Линии первого порядка в пространстве. Их взаимное расположение.
13. Понятие функции, ее свойства и графическая интерпретация.
14. Понятие предела функции, его свойства и вычисление.
15. Понятие производной, ее смысл и вычисление.
16. Применение производной при решении различных задач.
17. Неопределенный интеграл, его свойства. Правила вычисления.
18. Определенный интеграл, его свойства. Геометрические приложения.
19. Понятие вероятности, ее свойства.
20. Основные теоремы вероятностей.
21. Случайная величина, ее виды. Законы распределения случайной величины.
22. Числовые характеристики случайной величины, их смысл.
23. Основные понятия математической статистики.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

№	Название раздела, темы	Кол-во часов на СРС	Задание	Форма выполнения	Цель или задача СРС
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	Математика как элемент общей культуры	2	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы		
2	Введение в теорию множеств	6	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.
3	Основы логики	4	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.
4	Матрицы и определители	6	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.
5	Общие понятия аналитической геометрии	8	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.

1	2	3	4	5	6
6	Основы теории функций	2	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.
7	Интегральное исчисление	4	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.
8	Комбинаторика и вероятность	4	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.
9	Математика и культура	2	Изучить предложенные вопросы по теме, используя литературные источники, электронные ресурсы и лекционные материалы	краткий конспект терминов и понятий	Усвоение в полном объеме содержания учебной дисциплины по данной теме, расширение знаний, полученных во время лекционных занятий, решение задач.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы Института по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО

на ______ /_______ учебный год

№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей математики и информатики (протокол № ____от __________201__г.)

Заведующий кафедрой

_____________________________ _______________ _______________________

(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_____________________________ _______________ _______________________

(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

4.2. Основная литература

1. Белявский, С. С. Высшая математика: решение задач : учебное пособие для студентов экономических специальностей / С.С. Белявский, Н.А. Широкова – Минск : Вышэйшая школа, 2004. – 285 с.

2. Гусак, А. А. Высшая математика. В двух томах. Т. 1: учебник для студентов вузов / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 543 с.

3. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике: Ч.1: Для вузов / А. А. Гусак. – Минск : Вышэйшая школа, 1988. – 247 с.

4.3. Дополнительная литература

1. Волошин, А. И. Математика и искусство / А. И. Волошин – М., 2004. – 209 с.

2. Воронов, М. В. Математика для студентов гуманитарных факультетов / М. В. Воронов, Г. П. Мещерякова. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2002. – 374 с.

3. Гресс, П. В. Математика для гуманитариев. Учебное пособие / П. В. Гресс. – М., 2000. – 265с.

4. Плис, А. И. MathCAD: математический практикум: учебное пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина – М.: Финансы и статистика, 2000. – 362 с.

5. Шикин, Е. В. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. (Гуманитариям о математике). Учебник / Е. В. Шикин. – М., 2001. – 270 с.

4.4. Техническое и программное обеспечение дисциплины

Для проведения лекционных занятий требуется аудитория с видеопроекционной установкой для демонстрации презентаций по тематики читаемых лекций.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание

Составитель
Жук Светлана Николаевна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности 1-19 01 01 Дизайн (по направлениям),
направления специальности
1-19 01 01-06 Дизайн (виртуальной среды);
1-19 01 01-02 Дизайн (предметно-пространственной среды);
1-19 01 01-05 Дизайн (костюма и тканей)

[Электронный ресурс]

Редактор *Е. Д. Нежинец*
Технический редактор *Ю. В. Хадьков*

Подписано в печать 30.11.2019.
Гарнитура Times Roman. Объем 0,9 Мб

Частное учреждение образования
«Институт современных знаний имени А. М. Широкова»
Свидетельство о регистрации издателя №1/29 от 19.08.2013
220114, г. Минск, ул. Филимонова, 69.

ISBN 978-985-547-336-8
9 789855 473368